Numeri Palindromi da Numeri Repunit - Piramide Numerica – Numerical Pyramid

Fabrizio Casotto

Un numero naturale *n* viene generalmente rappresentato nel sistema posizionale con una base numerica *q* associando una "**sequenza finita di numeri naturali**" $n_k n_{k-1} n_{k-2} ..... n_2 n_1 n_0$, ciascuno scelto tra *0* e q-*1,* in modo tale che valga l'uguaglianza
$n = n_k \cdot q^k + n_{k-1} \cdot q^{k-1} + ... + n_2 \cdot q^2 + n_1 \cdot q + n_0$.
In questa trattazione ci interesseranno i numeri naturali palindromi con un numero dispari di cifre, in cui la "**sequenza finita di numeri naturali**" è formata da numeri naturali consecutivi simmetrici rispetto alla cifra centrale, 1234..(n-2)(n-1)**n**(n-1)(n-2)..4321. Il primo "ramo **ascendente**" dei numeri palindromi 1234..(n-2)(n-1)n abbiamo già visto come ricavarlo, riportiamo il procedimento per comodità:

$$S_n^A = \sum_{k=1}^{n} k q^{n-k} \qquad 2.1$$

riscriviamo la serie in forma estesa:

$$S_n^A = 1 q^{n-1} + 2 q^{n-2} + 3 q^{n-3} + \ldots\ldots. + (n-2) q^2 + (n-1) q + n \qquad 2.2$$

moltiplichiamo la 2.2 membro a membro per il fattore q

$$S_n^A q = 1 q^n + 2 q^{n-1} + 3 q^{n-2} + \ldots\ldots. + (n-2) q^3 + (n-1) q^2 + n q \qquad 2.3$$

sottraiamo membro a membro alla 2.3 la 2.2 e raccogliamo a fattore comune al secondo membro i monomi simili

$$S_n^A q - S_n^A = 1 q^n + (2-1) q^{n-1} + (3-2) q^{n-2} + \ldots.$$

$$\ldots + (n-2-n+3) q^3 + (n-1-n+2) q^2 + (n-n+1) q - n$$

possiamo notare che i termini all'interno delle parentesi rotonde al secondo membro valgono tutti 1, otteniamo quindi:

$$S_n^A q - S_n^A = \sum_{k=1}^{n} q^{n-k+1} - n \quad \text{ovvero:} \quad S_n^A q - S_n^A = q \sum_{k=1}^{n} q^{n-k} - n \qquad 2.4$$

esplicitando l'uguaglianza 2.4 rispetto ad S_n^A otteniamo:

$$S_n^A = \frac{1}{q-1} [q \sum_{k=1}^{n} q^{n-k} - n] \quad \text{che si può scrivere} \quad S_n^A = \frac{1}{q-1} [q \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} - n] \qquad 2.5$$

Con lo stesso metodo ricaviamo il secondo "ramo **discendente**" S_n^D dei numeri palindromi n(n-1)(n-2)..4321:

$$S_n^D = \sum_{k=1}^{n} k q^{k-1} \qquad 2.6$$

riscriviamo la somma della serie in forma estesa:

$$S_n^D = 1+2q^1+3q^2+\ldots\ldots+(n-2)q^{n-3}+(n-1)q^{n-2}+nq^{n-1} \qquad 2.7$$

moltiplichiamo la 2.7 membro a membro per il fattore q

$$S_n^D = q+2q^2+3q^3+\ldots\ldots+(n-2)q^{n-2}+(n-1)q^{n-1}+nq^n \qquad 2.8$$

sottraiamo membro a membro alla 2.8 la 2.7 e raccogliamo a fattore comune al secondo membro i monomi simili

$$S_n^D q - S_n^D = -1+(1-2)q^1+(2-3)q^2+\ldots$$

$$\ldots+(n-2-n+1)q^{n-2}+(n-1-n)q^{n-1}+nq^n$$

possiamo notare che i termini all'interno delle parentesi rotonde al secondo membro valgono tutti -1, otteniamo quindi:

$$S_n^D q - S_n^D = -\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}+nq^n \qquad 2.9$$

esplicitando l'uguaglianza 2.9 rispetto ad S_n^D otteniamo:

$$S_n^D = \frac{1}{q-1}\left[-\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}+nq^n\right] \qquad 3.0$$

Dalla 3.0 ricaviamo S_{n-1}^D

$S_{n-1}^D = \frac{1}{q-1}\left[-\sum_{k=1}^{n-1} q^{k-1}+(n-1)q^{n-1}\right]$, con facili passaggi $S_{n-1}^D = \frac{1}{q-1}\left[-\sum_{k=1}^{n-1} q^{k-1}+nq^{n-1}-q^{n-1}\right]$

il termine $-q^{n-1}$ lo includiamo nella sommatoria e otteniamo:

$$S_{n-1}^D = \frac{1}{q-1}\left[-\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}+nq^{n-1}\right] \qquad 3.1$$

Per come è stata definita S_n^D nella 2.6 abbiamo che $S_{n-1}^D+nq^{n-1}=S_n^D$ e per n=1 abbiamo $S_0^D+1q^0=S_1^D=1q^0=1$ e quindi $S_0^D+1=1$ e ci da $S_0^D=0$

Per ottenere il numero palindromo 1234..(n-2)(n-1)**n**(n-1)(n-2)..4321 occorre posizionare il ramo ascendente S_n^A in modo tale che la cifra meno significativa venga subito dopo la cifra più significativa del ramo discendente S_{n-1}^D , otterremo ciò moltiplicando S_n^A per q^{n-1} e sommandolo a S_{n-1}^D .

$$S_n^A q^{n-1}+S_{n-1}^D = \frac{q^{n-1}}{q-1}\left[q\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}-n\right]+\frac{1}{q-1}\left[-\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}+nq^{n-1}\right]$$

Un po di algebra e otteniamo:

$$S_n^A q^{n-1}+S_{n-1}^D=\frac{1}{q-1}[q^{n-1}q\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}-nq^{n-1}-\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}+nq^{n-1}]$$

con semplici passaggi otteniamo:

$$S_n^A q^{n-1}+S_{n-1}^D=\frac{1}{q-1}[q^n\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}-nq^{n-1}-\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}+nq^{n-1}]$$

e in fine:

$$S_n^A q^{n-1}+S_{n-1}^D=\frac{q^n-1}{q-1}\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} \qquad 3.2$$

Consideriamo la somma della progressione geometrica, o numero repunit in base q: $\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}$:

$$\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}=q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots\ldots+q^2+q^1+1 \qquad 3.3$$

Detta somma si ricava moltiplicando la 3.3 per q e sottraendo membro a membro la 3.3 stessa, otteniamo:

$q\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}-\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}=q^n-1$ esplicitando rispetto a $\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}$ otteniamo il generico numero

repunit:

$\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}=\frac{q^n-1}{q-1}$ sostituendo la frazione nella 3.2 risulta:

$$S_n^A q^{n-1}+S_{n-1}^D=[\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}]^2$$

$$[\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}]x[\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}]=S_n^A q^{n-1}+S_{n-1}^D$$

$$[\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}]x[\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}]=q^{n-1}\sum_{k=1}^{n} kq^{n-k}+\sum_{k=1}^{n-1} kq^{k-1} \qquad 3.5$$

I numeri **repunit** $\sum_{k=1}^{n} q^{k-1}=\frac{q^n-1}{q-1}$, per qualsiasi base q, rappresentano numeri con n cifre tutte uguali a 1;

un esempio per n=8 sarà: 11111111 oppure con la frazione $\frac{10^8-1}{10-1}=\frac{99999999}{9}=11111111$.

Prendiamo la base q=10 e per n i valori compresi tra 1 e 9, la 3.5 diviene:

$[\sum_{k=1}^{n} 10^{k-1}]x[\sum_{k=1}^{n} 10^{k-1}]=10^{n-1}\sum_{k=1}^{n} k10^{n-k}+\sum_{k=1}^{n-1} k10^{k-1}$ e ci permette di scrivere:

1x1=1
11x11=121
111x111=12321
1111x1111=1234321
11111x11111=123454321
111111x111111=12345654321
1111111x1111111=1234567654321
11111111x11111111=123456787654321
111111111x111111111=12345678987654321

Come secondo esempio prendiamo la base numerica q=16 e per “n” i rispettivi 15 valori: 1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F dove per i numeri naturali >9 si sono presi come simboli le prime lettere dell'alfabeto, come si conviene per la base esadecimale. Dalla 3.5 otteniamo:

$$[\sum_{k=1}^{n} 16^{k-1}]x[\sum_{k=1}^{n} 16^{k-1}]=16^{n-1}\sum_{k=1}^{n} k16^{n-k}+\sum_{k=1}^{n-1} k16^{k-1}$$ ossia in esadecimale:

$$[\sum_{k=1}^{n} 10^{k-1}]x[\sum_{k=1}^{n} 10^{k-1}]=10^{n-1}\sum_{k=1}^{n} k10^{n-k}+\sum_{k=1}^{n-1} k10^{k-1}$$, otteniamo:

1x1=1
11x11=121
111x111=12321
1111x1111=1234321
11111x11111=123454321
111111x111111=12345654321
1111111x1111111=1234567654321
11111111x11111111=123456787654321
111111111x111111111=12345678987654321
1111111111x1111111111=123456789A987654321
11111111111x11111111111=123456789ABA987654321
111111111111x111111111111=123456789ABCBA987654321
1111111111111x1111111111111=123456789ABCDCBA987654321
11111111111111x11111111111111=123456789ABCDEDCBA987654321
111111111111111x111111111111111=123456789ABCDEFEDCBA987654321

Albignasego, 07/03/2018
Fabrizio Casotto