Piramide Numerica – Numerical Pyramid *Fabrizio Casotto*

Un numero naturale *n* viene generalmente rappresentato in una base numerica *q* associando una "**sequenza finita di numeri naturali**" $n_k n_{k-1} n_{k-2} ..... n_2 n_1 n_0$, ciascuno scelto tra *0* e q-*1*, in modo tale che valga l'uguaglianza $n = n_k q^k + n_{k-1} q^{k-1} + ... + n_2 q^2 + n_1 q + n_0$.
In questa trattazione ci interesseranno i numeri naturali in cui la "**sequenza finita di numeri naturali**" è formata da numeri naturali consecutivi 1234..(n-2)(n-1)n. Chiameremo questi numeri con il termine generico S_n e la rispettiva somma della serie numerica con base q assumerà la forma:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k q^{n-k} \qquad 1.1$$

riscriviamo la serie in forma estesa:

$$S_n = 1q^{n-1} + 2q^{n-2} + 3q^{n-3} + \ldots\ldots + (n-2)q^2 + (n-1)q^1 + n \qquad 1.2$$

moltiplichiamo la 1.2 membro a membro per il fattore q

$$S_n q = 1q^n + 2q^{n-1} + 3q^{n-2} + \ldots\ldots + (n-2)q^3 + (n-1)q^2 + nq \qquad 1.3$$

sottraiamo membro a membro alla 1.3 la 1.2 e raccogliamo a fattore comune al secondo membro i monomi simili

$$S_n q - S_n = 1q^n + (2-1)q^{n-1} + (3-2)q^{n-2} + \ldots.$$

$$\ldots + (n-2-n+3)q^3 + (n-1-n+2)q^2 + (n-n+1)q^1 - n$$

possiamo notare che i termini all'interno delle parentesi rotonde al secondo membro valgono tutti 1, otteniamo quindi:

$$S_n q - S_n = \sum_{k=1}^{n} q^{n-k+1} - n \quad \text{ovvero:} \quad S_n q - S_n = q \sum_{k=1}^{n} q^{n-k} - n \qquad 1.4$$

esplicitando l'uguaglianza 1.4 rispetto al primo termine del secondo membro otteniamo:

$$q \sum_{k=1}^{n} q^{n-k} = S_n q - S_n + n \qquad 1.5$$

sottraiamo S_n alla 1.5 membro a membro

$$q \sum_{k=1}^{n} q^{n-k} - S_n = S_n q - 2S_n + n \quad \text{ed esplicitiamola con le sommatorie della 1.1}$$

$$q \sum_{k=1}^{n} q^{n-k} - \sum_{k=1}^{n} k q^{n-k} = q \sum_{k=1}^{n} k q^{n-k} - 2 \sum_{k=1}^{n} k q^{n-k} + n$$

possiamo riscrivere la precedente nel modo compatto:

$$\sum_{k=1}^{n}(q-k)q^{n-k}=(q-2)\sum_{k=1}^{n}kq^{n-k}+n$$

oppure scambiando i membri: $(q-2)\sum_{k=1}^{n}kq^{n-k}+n=\sum_{k=1}^{n}(q-k)q^{n-k}$ 1.6

Se poniamo come base numerica q=10 e per “n” i rispettivi 9 valori: 1,2,3,4,5,6,7,8,9 nella 1.6, otteniamo le relazioni numeriche seguenti:

$$8\sum_{k=1}^{n}k10^{n-k}+n=\sum_{k=1}^{n}(10-k)10^{n-k}$$

1x8+1=9
12x8+2=98
123x8+3=987
1234x8+4=9876
12345x8+5=98765
123456x8+6=987654
1234567x8+7=9876543
12345678x8+8=98765432
123456789x8+9=987654321

Come altro esempio prendiamo la base numerica q=16 e per “n” i rispettivi 15 valori: 1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F dove per i numeri naturali >9 si sono presi come simboli le prime lettere dell'alfabeto, come si conviene per la base esadecimale. Dalla 1.6 otteniamo:

$14\sum_{k=1}^{n}k16^{n-k}+n=\sum_{k=1}^{n}(16-k)16^{n-k}$ ossia in esadecimale: $E\sum_{k=1}^{n}k10^{n-k}+n=\sum_{k=1}^{n}(10-k)10^{n-k}$

1xE+1=F
12xE+2=FE
123xE+3=FED
1234xE+4=FEDC
12345xE+5=FEDCB
123456xE+6=FEDCBA
1234567xE+7=FEDCBA9
12345678xE+8=FEDCBA98
123456789xE+9=FEDCBA987
123456789AxE+A=FEDCBA9876
123456789ABxE+B=FEDCBA98765
123456789ABCxE+C=FEDCBA987654
123456789ABCDxE+D=FEDCBA9876543
123456789ABCDExE+E=FEDCBA98765432
123456789ABCDEFxE+F=FEDCBA987654321

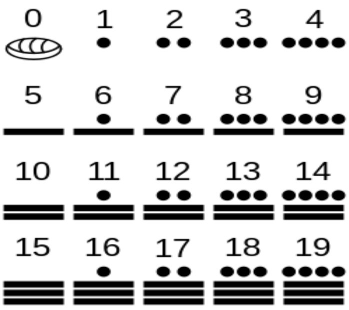
dal notevole impatto visivo.

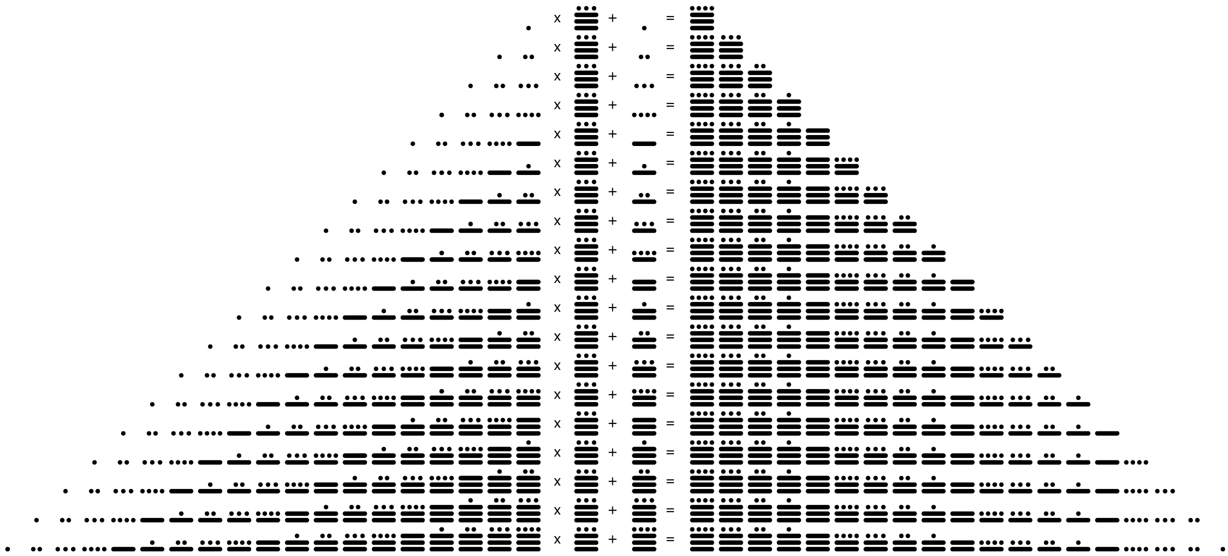
Albignasego, 01/01/2018
Fabrizio Casotto

Un altro esempio interessante che non possiamo trascurare è la base della numerazione vigesimale degli antichi Maya: q=20 e per “n” i rispettivi valori da 1 a 19. Dalla 1.6 otteniamo:

$$18\sum_{k=1}^{n} k20^{n-k}+n=\sum_{k=1}^{n}(20-k)20^{n-k}$$

Usiamo questa volta la simbologia numerica antica:





Albignasego, 14/01/2018
Fabrizio Casotto

Corollario

Riportiamo la seconda della 1.4: $S_n q - S_n = q\sum_{k=1}^{n} q^{n-k} - n$;

Consideriamo la somma della progressione geometrica al secondo membro:

$$\sum_{k=1}^{n} q^{n-k} = q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots\ldots + q^2 + q^1 + 1 \qquad 1.7$$

La somma della progressione geometrica si ricava moltiplicando la 1.7 per q e sottraendo membro a membro la 1.7 stessa, otteniamo:

$q\sum_{k=1}^{n} q^{n-k} - \sum_{k=1}^{n} q^{n-k} = q^n - 1$ esplicitando rispetto a $\sum_{k=1}^{n} q^{n-k}$ e sostituendo nella 1.4 otteniamo:

$S_n(q-1) = q\dfrac{q^n-1}{q-1} - n$ ed in fine $S_n = q\dfrac{q^n-1}{(q-1)^2} - \dfrac{n}{q-1}$

Abbiamo dimostrato che la somma della serie 1.1 vale:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} kq^{n-k} = q\frac{q^n-1}{(q-1)^2} - \frac{n}{q-1} = \frac{(q^n-1)q - (q-1)n}{(q-1)^2} \qquad 1.8$$

Tornando ai numeri naturali in base q in cui la "**sequenza finita di numeri naturali**" è formata da numeri naturali consecutivi 1234..(n-2)(n-1)n si ha:

$$12345...(n-1)n = q\frac{q^n-1}{(q-1)^2} - \frac{n}{q-1} = \frac{(q^n-1)q - (q-1)n}{(q-1)^2}$$

$$1 = \frac{(10^1-1)10 - 9x1}{81}$$

$$12 = \frac{(10^2-1)10 - 9x2}{81}$$

$$123 = \frac{(10^3-1)10 - 9x3}{81}$$

$$1234 = \frac{(10^4-1)10 - 9x4}{81}$$

…......

$$123456789 = \frac{(10^9-1)10 - 9x9}{81}$$

In esadecimale per n=15=F

$$123456789ABCDEF = \frac{(16^{15}-1)16 - 15x15}{15^2} = \frac{(10^F-1)10 - FxF}{F^2}$$

Albignasego, 13/01/2018

Fabrizio Casotto